Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $2\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\cos\left(2\pi-x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;-\pi\right]$.

Решение.

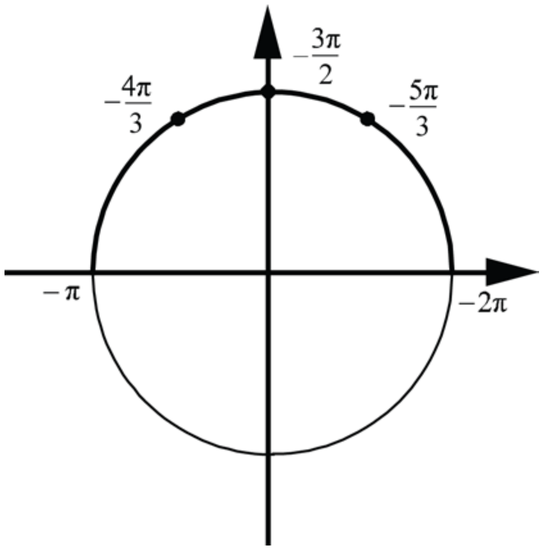
а) Преобразуем уравнение:

$$-2\cos x\cdot\left(-\sin x\right)=\sqrt{3}\cos x;\qquad \cos x\cdot\left(2\sin x-\sqrt{3}\right)=0;$$

$$\cos x=0 \text{ или } \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда}$$

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, \text{ или } x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, \text{ или } x=\frac{2\pi}{3}+2\pi m,\ k, n, m\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;-\pi\right]$.



Получаем $-\dfrac{5\pi}{3}, -\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k$; $\dfrac{\pi}{3}+2\pi n$; $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi m,\ k, n, m\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{5\pi}{3}, -\dfrac{3\pi}{2}, -\dfrac{4\pi}{3}$.

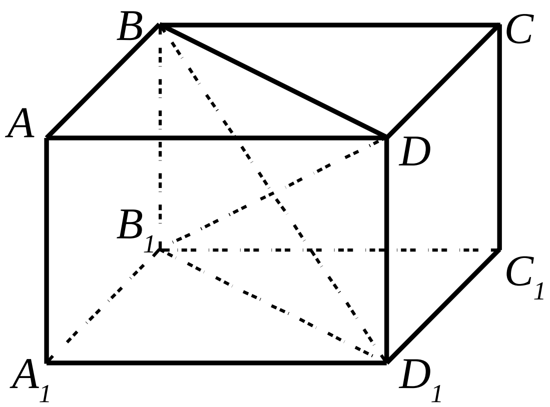
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14 Плоскость α проходит через середину ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно прямой BD_1.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ABC равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $48\sqrt{3}$, $AB = 2\sqrt{3}$ и $AD = 6$.

Решение.



а) В прямоугольнике BB_1D_1D угол BB_1D равен углу BD_1D. Прямая D_1D перпендикулярна плоскости ABC. Прямая BD_1 перпендикулярна плоскости α. Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Поэтому искомый угол равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.

б) Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $AB \cdot AD \cdot AA_1 = 48\sqrt{3}$.

Следовательно, $DD_1 = AA_1 = \dfrac{48\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot 6} = 4$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BD_1D. Его катеты равны $DD_1 = 4$ и $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 6^2} = 4\sqrt{3}$.

Значит, $\angle BD_1D = \operatorname{arctg}\dfrac{BD}{DD_1} = \operatorname{arctg}\dfrac{4\sqrt{3}}{4} = \operatorname{arctg}\sqrt{3}$,

следовательно $\angle BD_1D = 60°$.

Ответ: 60°.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\dfrac{20+x-x^2}{x^2-5x}\le 1-\dfrac{2}{x-1}$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x-3}{x-1}+\frac{x^2-x-20}{x^2-5x}\ge 0;\qquad \frac{x-3}{x-1}+\frac{(x+4)(x-5)}{x(x-5)}\ge 0.$$

Тогда $\begin{cases}\dfrac{x-3}{x-1}+\dfrac{x+4}{x}\ge 0,\\ x\ne 5,\end{cases}$ откуда $\begin{cases}\dfrac{\left(x+\sqrt{2}\right)\left(x-\sqrt{2}\right)}{x(x-1)}\ge 0,\\ x\ne 5.\end{cases}$

Решая неравенство, получаем $x\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right];\ (0;1);\ \left[\sqrt{2};5\right);\ (5;\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty;-\sqrt{2}\right];\ (0;1);\ \left[\sqrt{2};5\right);\ (5;\infty)$.

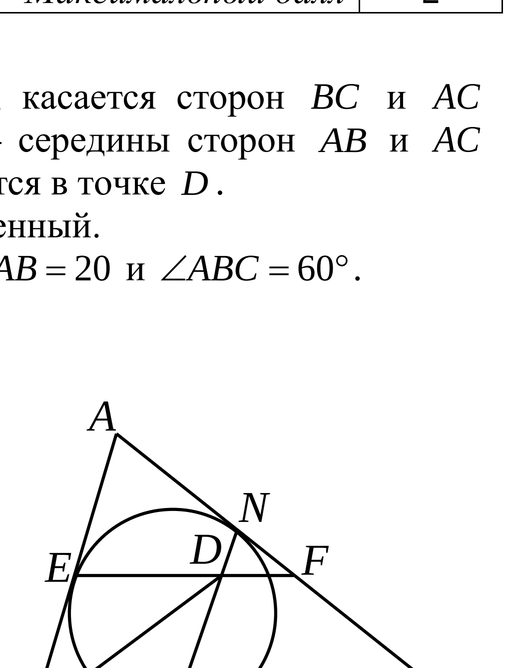
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D.

а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.

б) Найдите площадь треугольника BED, если $AB=20$ и $\angle ABC=60°$.

Решение.



а) Поскольку $CM=CN$, треугольник MCN равнобедренный. Прямые EF и BC параллельны, поэтому треугольник DFN подобен треугольнику MCN, следовательно, треугольник DFN также равнобедренный: $DF=NF$.

б) Обозначим $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Предположим, что $a>c$. Тогда

$$BE=\frac{c}{2},\quad CF=\frac{b}{2},\quad CM=CN=p-c=\frac{a+b-c}{2},$$

$$FD=FN=CN-CF=\frac{a+b-c}{2}-\frac{b}{2}=\frac{a-c}{2}.$$

Значит, $ED=EF-FD=\frac{a}{2}-\frac{a-c}{2}=\frac{c}{2}=EB$, то есть треугольник BED равнобедренный.

Аналогично для $a\le c$.

Поскольку прямые ED и BC параллельны,

$$\angle BED=180^\circ-\angle ABC=180^\circ-60^\circ=120^\circ.$$

Следовательно, $S_{BED}=\frac{1}{2}BE\cdot ED\cdot\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=25\sqrt{3}$.

Ответ: $25\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 9 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что в пятый месяц кредитования нужно выплатить 44 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

<u>Решение.</u>
Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:

S; $\frac{8S}{9}$; …; $\frac{2S}{9}$; $\frac{S}{9}$; 0.

Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:

$1{,}04S$; $1{,}04\cdot\frac{8S}{9}$; …; $1{,}04\cdot\frac{2S}{9}$; $1{,}04\cdot\frac{S}{9}$.

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$\frac{9\cdot 0{,}04S+S}{9}$; $\frac{8\cdot 0{,}04S+S}{9}$; …; $\frac{2\cdot 0{,}04S+S}{9}$; $\frac{0{,}04S+S}{9}$.

В пятый месяц выплата составит $\frac{5\cdot 0{,}04\cdot S+S}{9}=\frac{1{,}2S}{9}$. А всего следует выплатить

$$S+S\cdot 0{,}04\left(1+\frac{8}{9}+\ldots+\frac{2}{9}+\frac{1}{9}\right)=S\left(1+\frac{10\cdot 0{,}04}{2}\right)=1{,}2S.$$

Значит, банку нужно вернуть $44\,000\cdot 9=396\,000$ рублей.

Ответ: 396 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых любое число x из отрезка $[3; 5]$ является решением уравнения $|x-a-6|+|x+a+4|=2a+10$.

Решение.

Если $2a+10<0$, то уравнение решений не имеет.

Пусть $a=-5$. Тогда уравнение имеет вид $|x-1|+|x-1|=0$ и ни одно число из отрезка $[3, 5]$ не является его решением.

Пусть $a>-5$. Запишем уравнение в виде

$$|x-(a+6)|+|x-(-a-4)|=2a+10.$$

При $a>-5$ верно неравенство $-a-4<a+6$, и поэтому решением уравнения является любое число из отрезка $[-a-4,\ a+6]$, поскольку длина этого отрезка равна $(a+6)-(-a-4)=2a+10$ и уравнению удовлетворяют те и только те точки x, сумма расстояний от каждой из которых до точек $x=a+6$ и $x=-a-4$ равна $2a+10$.

Осталось выбрать те значения a, при каждом из которых отрезок $[-a-4,\ a+6]$ содержит отрезок $[3, 5]$. Это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} -a-4\le 3, \\ a+6\ge 5; \end{cases} \quad \begin{cases} a\ge -7, \\ a\ge -1, \end{cases} \quad \text{откуда } a\ge -1.$$

Ответ: $a\ge -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 В результате опроса выяснилось, что примерно 45 % опрошенных предпочитают кофе чаю (число 45 получено с помощью округления до ближайшего целого числа).

а) Могло ли участвовать в опросе ровно 24 человека?

б) Могло ли участвовать в опросе менее 24 человек?

в) Какое наименьшее число человек могло участвовать в опросе?

Решение.

а) Нет. Если кофе предпочитают 12 и более человек из опрошенных, то это число составляет не менее 50 %, если 11 человек, то это число после округления составляет 46 %, а если 10 или менее человек — то не более 42 % после округления.

б) Да. Например, если из 20 опрошенных 9 человек предпочитают кофе.

в) Пусть всего в опросе участвовало n человек, из которых k предпочитают кофе. Тогда $0,445 \le \frac{k}{n} < 0,455$, откуда $89n \le 200k < 91n$. Из всех частей неравенства вычтем $100n$ и разделим неравенство на -1:

$$9n < 100(n-2k) \le 11n.$$

Значит, между числами $9n$ и $11n$ должно найтись число, кратное 100 и большее 0, поскольку $n-2k>0$. Наименьшее n, удовлетворяющее этому условию, получим из системы (если она разрешима в целых числах)

$$\begin{cases} 9n < 100, \\ 11n \ge 100, \end{cases} \quad \text{откуда } 9,09 \le n < 11,11.$$

При $n=11$ находим, что если $k=5$, то все условия выполнены: $\frac{5}{11} = 0,(45)$, что больше 0,445, но меньше 0,455. Значит, наименьшее возможное число участников опроса равно 11.

Ответ: а) Нет; б) да; в) 11.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *б* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Критерии оценивания заданий с развёрнутым ответом

13 а) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\sin(\pi-x)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-2\pi\right]$.

Решение.

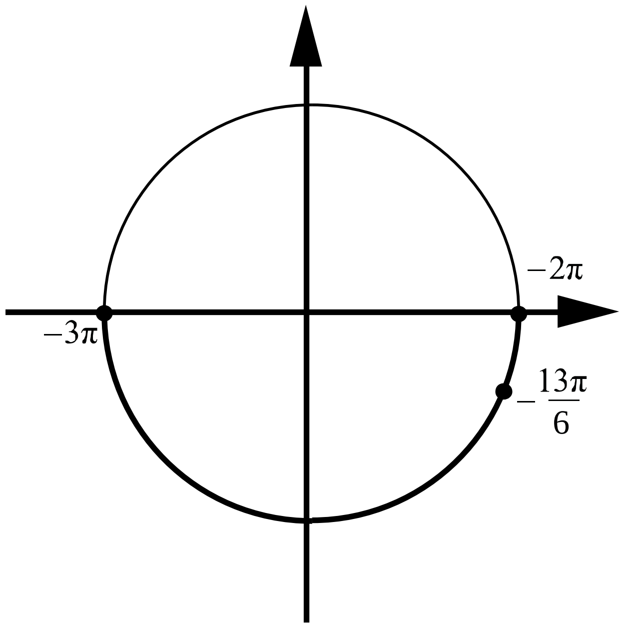
а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos x\cdot\sin x=\sqrt{3}\sin x;\qquad \sin x\cdot\left(2\cos x-\sqrt{3}\right)=0;$$

$$\sin x=0 \text{ или } \cos x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ откуда}$$

$$x=\pi k, \text{ или } x=\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ k,n\in\mathbb{Z}.$$

б) С помощью тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi;-2\pi\right]$.



Получаем -3π, $-\frac{13\pi}{6}$, -2π.

Ответ: а) πk; $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $k,n\in\mathbb{Z}$; б) -3π, $-\frac{13\pi}{6}$, -2π.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или в пункте *б*. ИЛИ Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

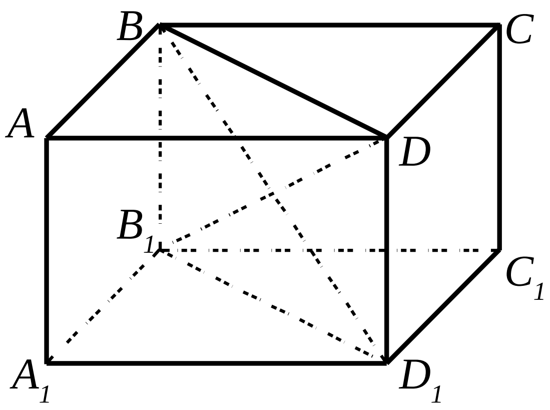
14 Плоскость α проходит через середину ребра AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ перпендикулярно прямой BD_1.

а) Докажите, что угол между плоскостью α и плоскостью ABC равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.

б) Найдите угол между плоскостью α и плоскостью ABC, если объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $10\sqrt{33}$, $AB=\sqrt{11}$ и $AD=5$.

Решение.

а) В прямоугольнике BB_1D_1D угол BB_1D равен углу BD_1D. Прямая D_1D перпендикулярна плоскости ABC. Прямая BD_1 перпендикулярна плоскости α. Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Поэтому искомый угол равен углу между прямыми BB_1 и B_1D.



б) Объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен $AB\cdot AD\cdot AA_1=10\sqrt{33}$.

Следовательно, $DD_1=AA_1=\dfrac{10\sqrt{33}}{\sqrt{11}\cdot 5}=2\sqrt{3}$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник BD_1D. Его катеты равны $DD_1=2\sqrt{3}$, $BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2+5^2}=6$.

Значит, $\angle BD_1D=\operatorname{arctg}\dfrac{BD}{DD_1}=\operatorname{arctg}\dfrac{6}{2\sqrt{3}}=\operatorname{arctg}\sqrt{3}$,

следовательно $\angle BD_1D=60^\circ$.

Ответ: 60°.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	2
Верно доказан пункт *а*. ИЛИ Верно решён пункт *б* при отсутствии обоснований в пункте *а*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

15 Решите неравенство $\frac{18-x^2-3x}{x^2+6x} \le 1+\frac{3}{x+2}$.

Решение.
Преобразуем неравенство:

$$\frac{x+5}{x+2}+\frac{x^2+3x-18}{x^2+6x} \ge 0; \qquad \frac{x+5}{x+2}+\frac{(x+6)(x-3)}{x(x+6)} \ge 0.$$

Тогда $\begin{cases} \frac{x+5}{x+2}+\frac{x-3}{x} \ge 0, \\ x \ne -6, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} \frac{(x+3)(x-1)}{x(x+2)} \ge 0, \\ x \ne -6. \end{cases}$

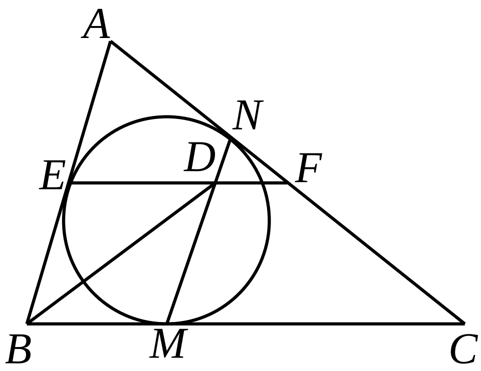
Решая неравенство, получаем $x \in (-\infty; -6); (-6; -3]; (-2; 0); [1; \infty)$.

Ответ: $(-\infty; -6); (-6; -3]; (-2; 0); [1; \infty)$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Решение содержит вычислительную ошибку, возможно, приведшую к неверному ответу, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16 Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC и AC в точках M и N соответственно, E и F — середины сторон AB и AC соответственно. Прямые MN и EF пересекаются в точке D.
а) Докажите, что треугольник DFN равнобедренный.
б) Найдите площадь треугольника BED, если $AB = 28$ и $\angle ABC = 60°$.

Решение.



а) Поскольку $CM = CN$, треугольник MCN равнобедренный. Прямые EF и BC параллельны, поэтому треугольник DFN подобен треугольнику MCN, следовательно, треугольник DFN также равнобедренный: $DF = NF$.
б) Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Пусть p — полупериметр треугольника ABC. Предположим, что $a > c$. Тогда

$$BE = \frac{c}{2},\quad CF = \frac{b}{2},\quad CM = CN = p - c = \frac{a+b-c}{2},$$

$$FD = FN = CN - CF = \frac{a+b-c}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a-c}{2}.$$

Значит, $ED = EF - FD = \frac{a}{2} - \frac{a-c}{2} = \frac{c}{2} = EB$, то есть треугольник BED равнобедренный.

Аналогично для $a \le c$.

Поскольку прямые ED и BC параллельны,

$$\angle BED = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

Следовательно, $S_{BED} = \frac{1}{2} BE \cdot ED \cdot \sin 120^\circ = \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 49\sqrt{3}$.

Ответ: $49\sqrt{3}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте *б*. ИЛИ Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*. ИЛИ При обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки. ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

17 15 января планируется взять кредит в банке на 15 месяцев. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 4 % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что в восьмой месяц кредитования нужно выплатить 29 тыс. рублей. Какую сумму нужно вернуть банку в течение всего срока кредитования?

__**Решение.**__
Пусть сумма кредита равна S. По условию долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшаться до нуля равномерно:
$S;\ \frac{14S}{15};\ \ldots;\ \frac{2S}{15};\ \frac{S}{15};\ 0.$
Первого числа каждого месяца долг возрастает на 4 %, значит, последовательность размеров долга по состоянию на 1-е число такова:
$1{,}04S;\ 1{,}04\cdot\frac{14S}{15};\ \ldots;\ 1{,}04\cdot\frac{2S}{15};\ 1{,}04\cdot\frac{S}{15}.$
Следовательно, выплаты должны быть следующими:
$\frac{15\cdot 0{,}04S+S}{15};\ \frac{14\cdot 0{,}04S+S}{15};\ \ldots;\ \frac{2\cdot 0{,}04S+S}{15};\ \frac{0{,}04S+S}{15}.$
В восьмой месяц выплата составит $\frac{8\cdot 0{,}04\cdot S+S}{15}=\frac{1{,}32S}{15}$. А всего следует выплатить
$$S+S\cdot 0{,}04\left(1+\frac{14}{15}+\ldots+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right)=S\left(1+\frac{16\cdot 0{,}04}{2}\right)=1{,}32S.$$
Значит, банку нужно вернуть $29\,000\cdot 15=435\,000$ рублей.
Ответ: 435 000 рублей.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	3
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки	2
Верно построена математическая модель, и решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение не завершено	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения a, при каждом из которых любое число x из отрезка $[3;4]$ является решением уравнения $|x-a-5|+|x+a+1|=2a+6$.

Решение.

Если $2a+6<0$, то уравнение решений не имеет.

Пусть $a=-3$. Тогда уравнение имеет вид $|x-2|+|x-2|=0$ и ни одно число из отрезка $[3, 4]$ не является его решением.

Пусть $a>-3$. Запишем уравнение в виде

$$|x-(a+5)|+|x-(-a-1)|=2a+6.$$

При $a>-3$ верно неравенство $-a-1<a+5$, и поэтому решением уравнения является любое число из отрезка $[-a-1, a+5]$, поскольку длина этого отрезка равна $(a+5)-(-a-1)=2a+6$ и уравнению удовлетворяют те и только те точки x, сумма расстояний от каждой из которых до точек $x=a+5$ и $x=-a-1$ равна $2a+6$.

Осталось выбрать те значения a, при каждом из которых отрезок $[-a-1, a+5]$ содержит отрезок $[3, 4]$. Это выполнено тогда и только тогда, когда

$\begin{cases}-a-1\le 3,\\ a+5\ge 4;\end{cases}$ $\begin{cases}a\ge -4,\\ a\ge -1,\end{cases}$ откуда $a\ge -1$.

Ответ: $a\ge -1$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получены все значения a, но ответ содержит лишнее значение	3
С помощью верного рассуждения получены все решения уравнения	2
Задача верно сведена к исследованию возможного значения корней уравнения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

19 В результате опроса выяснилось, что примерно 47 % опрошенных предпочитают кофе чаю (число 47 получено с помощью округления до ближайшего целого числа).

а) Могло ли участвовать в опросе ровно 28 человек?

б) Могло ли участвовать в опросе менее 28 человек?

в) Какое наименьшее число человек могло участвовать в опросе?

Решение.

а) Нет. Если кофе предпочитают 14 и более человек из опрошенных, то это число составляет не менее 50 %, а если 13 или менее человек — то не более 46 % после округления.

б) Да. Например, если из 19 опрошенных 9 человек предпочитают кофе.

в) Пусть всего в опросе участвовало n человек, из которых k предпочитают кофе. Тогда $0,465 \le \frac{k}{n} < 0,475$, откуда $93n \le 200k < 95n$. Из всех частей неравенства вычтем $100n$ и разделим неравенство на -1:

$$5n < 100(n-2k) \le 7n.$$

Значит, между числами $5n$ и $7n$ должно найтись число, кратное 100 и большее 0, поскольку $n-2k>0$. Наименьшее n, удовлетворяющее этому условию, получим из системы (если она разрешима в целых числах)

$$\begin{cases} 5n < 100, \\ 7n \ge 100, \end{cases} \text{ откуда } 14,28 \le n < 20.$$

При $n=15$ находим, что если $k=7$, то все условия выполнены: $\frac{7}{15}=0,4(6)$, что больше 0,465, но меньше 0,475. Значит, наименьшее возможное число участников опроса равно 15.

Ответ: а) Нет; б) да; в) 15.

Содержание критерия	Баллы
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *б*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *а* и *в*, либо получены верные обоснованные ответы в пунктах *б* и *в*	3
Получен верный обоснованный ответ в пункте *в*, пункты *а* и *б* не решены	2
Приведён пример в пункте *б*, пункты *а* и *в* не решены, либо получен верный обоснованный ответ в пункте *а*, пункты *б* и *в* не решены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4